

1 次試験 専門科目 (13. 数学)

(注意) 解答は、設問ごとに別の解答用紙を用いること。

全問に解答しなさい。

I. 次の各問に答えよ。

(1) 自然数 n に対し、

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{c_n}{(n+1)!} \quad (0 < c_n < e)$$

となる c_n が存在することを示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi e n!) = 1$ を示せ。

(3) $f_n(x) = \sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$ とする。
関数列 $\{f_n\}$ は一様収束する部分列を持たないことを示せ。

II.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形と、標準化行列を求めよ。

III.

自然数 n に対し、 $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ とおく。次を示せ。

$$(i) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(ii) P_n(1) = 1$$