I. II. III. IV. の全問に解答せよ。

I. 図のように滑らかな床の上で質量 m のおもり 2 つが，3 つのバネでつながれている。壁につないだ両端のバネおよび真中のバネのバネ定数はそれぞれ k, k' とする。静的な力の釣り合い位置からのおもりの変位をそれぞれ x, y としたとき，おもりの運動について次の問いに答えよ。

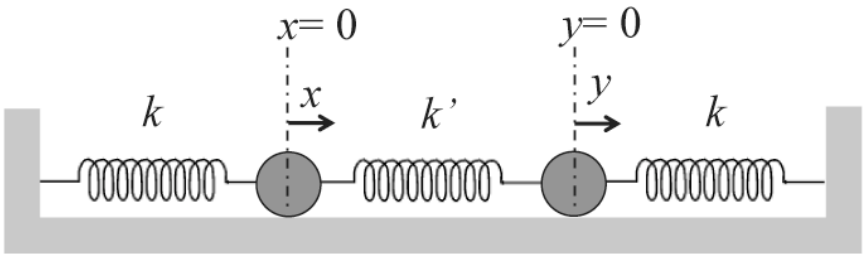
(1) 2 つのおもりの運動方程式を示せ。

(2) 固有角振動数 ω_1, ω_2 を求めよ。ただし $\omega_1 < \omega_2$ とする。

(3) 変位を与えて静止させた状態から 2 つのおもりを同時に放す場合を考える。この初期条件をうまく選ぶと固有角振動数をもつ基準振動を作ることができる。例えば，角振動数 ω_1 の基準振動を作るには，初期条件として $x = y = a$ のように x, y とも同じ大きさの変位を選べば良い。角振動数 ω_2 の基準振動を作るには，初期条件の変位をどのように選べば良いか答えよ。

(4) 時刻 $t = 0$ で $x = a, y = 0$ の静止状態から 2 つのおもりを放したとき，時刻 t における x, y を ω_1, ω_2 を含む形で求めよ。

(5) k' が k より十分小さいとき，(4) の解はうなりのように振る舞う。このときの x, y の時間変化の概形を描け。また，うなりの周期を ω_1, ω_2 を用いて求めよ。



II. 図 1 のように，真空中に平行平板電極が距離 d だけ離れて置かれている。陰極板の温度は十分高く，陰極からは任意の量の熱電子が飛び出すことができるとする。陽極と陰極の間に電圧 V_{p} をかけると，電極間に定常電流が流れる。この定常電流密度 j と陽極電圧 V_{p} の関係について考察しよう。

電極板に垂直に，陰極から陽極に向かって x 軸をとり，陰極の位置を $x=0$，陽極の位置を $x=d$ とする。平行平板電極の面積は十分大きく，電極板の間の現象は座標 x のみに依存する。陽極電圧 V_{p} を与え，位置 x に依存しない定常電流が流れているとき，陰極から飛び出した電子は陰極と陽極の間に分布し，電極間の電場は一様ではない。位置 x における，電子による電荷密度を $\rho(x)$，陰極から陽極に向かう電子の速度を $v(x)$ とする（図 1）。以下，電子が陰極から出るときにもつ初速度は無視できる（$v(0)=0$）とし，重力の影響は考えない。電子の電荷を $-e$，質量を m，真空の誘電率を ϵ_0 とする。

(1) 位置 x での電位（静電ポテンシャル）を $\phi(x)$ とし，電位の基準点を $x=0$ とする（$\phi(0)=0$）。位置 x にある 1 個の電子について，エネルギー保存の式を示せ。

(2) 位置 x におけるポアソン方程式を示せ。

(3) 定常電流密度 $j=-\rho(x)v(x)$ より，電位についての関係式

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=\frac{j}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e\phi(x)}}$$

が成立することを示せ。

(4) 定常電流が流れているときは陰極表面における電場は 0 となる。電位の導関数 $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$ が満足すべき関係式を求めよ。

(5) 定常電流密度 j は陽極電圧 V_{p} の $\dfrac{3}{2}$ 乗に比例することを示せ。

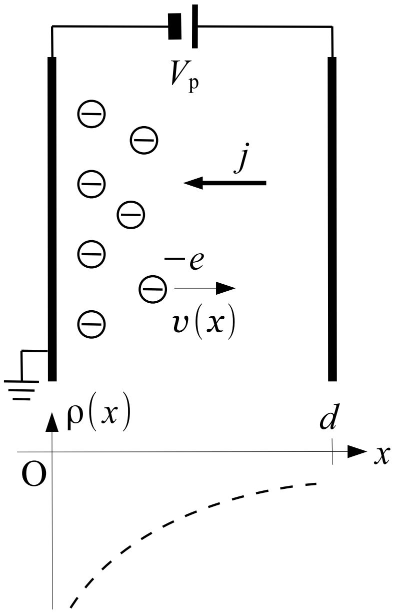


図 1

III. 図1のようなポテンシャル中の全エネルギーEの粒子の運動を考える．この粒子の位置xでの古典的運動量は

$$p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$$

で与えられ，古典的に運動可能な領域は$a < x < b$である．領域の端$x = a, b$は転回点とよばれ，これらの点で$p(a) = p(b) = 0$となる．

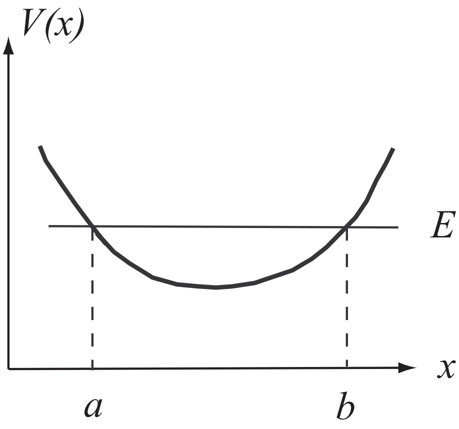


図 1:

この粒子の運動を量子化すると現れる離散エネルギー状態をWKB近似を用いて求める．古典的運動量$p(x)$の運動可能領域での積分に対する量子化条件

$$\int_a^b p(x)dx = \pi\hbar\,(n + \frac{1}{2}), \qquad n = 0, 1, 2, 3....$$

から離散エネルギー準位が得られることが知られている．

以下の３つの設問に答えよ．

(1) WKB近似を用いて，ポテンシャルが$V(x) = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2$で与えられる調和振動子の離散エネルギー準位$E_n$が

$$E_n = \hbar\,\omega\,(n + \frac{1}{2})$$

であることを示せ．

(2) 図 2（左）のような台の上部での中性子の運動を考える．完全反射する台との相互作用を除けば，中性子には z 軸下向きの一様な重力だけが作用している．中性子に作用するポテンシャルは図 2（右）のように与えられる．また中性子は z 軸方向にのみ運動していると考えてよい．台と重力ポテンシャルに閉じこめられた中性子の運動を表す離散エネルギー準位 E_n を求めよ．

(3) 基底状態のエネルギー準位を概算せよ．さらに，基底状態の波動関数の z 方向の広がりを特徴づける転回点の高さを概算せよ．ただし，$\hbar \sim 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$，また中性子の質量は $m \sim 2 \times 10^{-27}$ kg である．

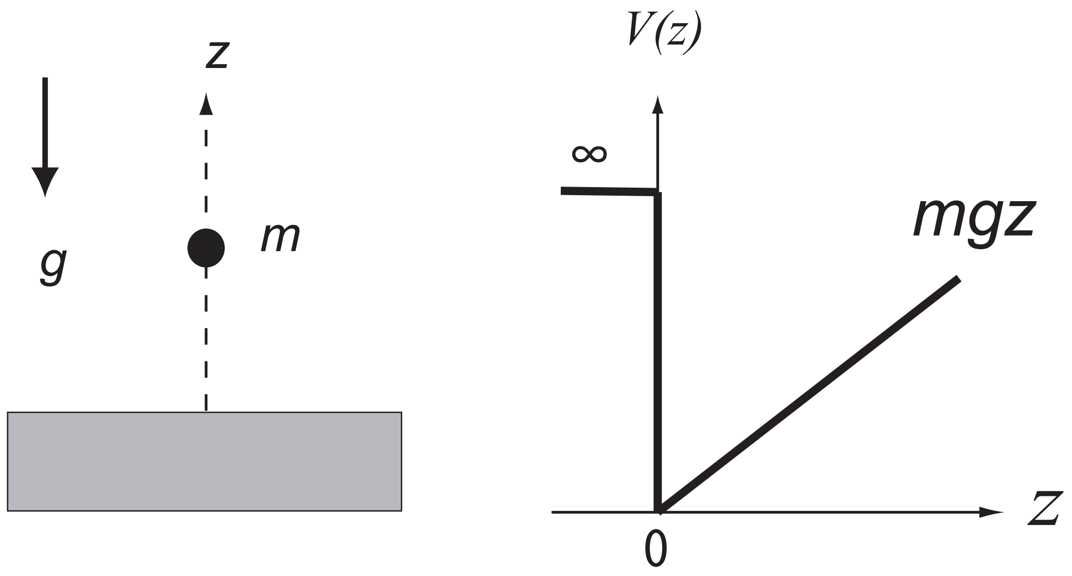


図 2:

IV. ポテンシャル $V=\frac{1}{2}kx^2\,(k>0)$ の下で１次元運動している質量 m の N 個の粒子がある。粒子間に相互作用はなく、系は温度 T のカノニカル分布に従うものとする。以下では、$\omega=\sqrt{k/m}$ とおき、プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$、ボルツマン定数を k_B として、各設問に答えよ。

(1) この系の分配関数と比熱 C を求めよ。

(2) この系の比熱は図１のような温度依存性を示す。低温領域 ($T \ll T_1$) での比熱の表式と高温領域 ($T_1 \ll T$) での比熱の値 C_1、および２つの温度領域に分ける特徴的な温度 T_1 の大きさを求めよ。

次に、図２のように $x=\pm a$ の位置に無限に高いポテンシャル障壁があり、$-a<x<a$ の領域には、調和振動子型ポテンシャルがある

$$V(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}kx^2 & (\,|x|<a\,)\\ \infty & (\,x=\pm a\,)\end{cases}$$

の場合を考える。ただし、$\hbar\omega=\hbar\sqrt{k/m}\ll\frac{1}{2}ka^2$ が成り立っているものとする。

(3) このとき、系の比熱の温度依存性は、図１にある T_1、C_1 に加えて、特徴的な温度 $T_2\,(T_1\ll T_2)$ と漸近値 C_2 をもつ図３のようになる。比熱がこのような温度変化を示す理由を定性的に説明し、T_2 の大きさと $T_2\ll T$ の領域での比熱の値 C_2 を求めよ。

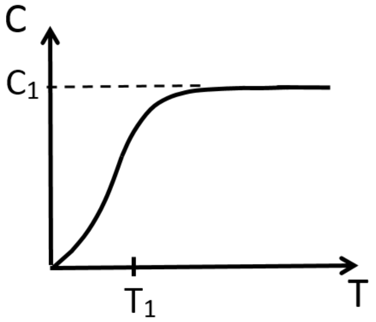


図１

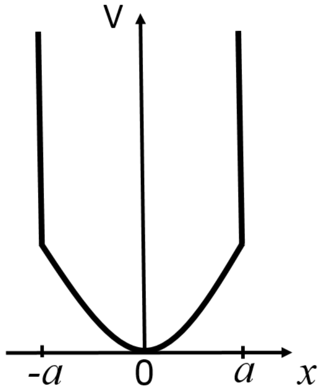


図２

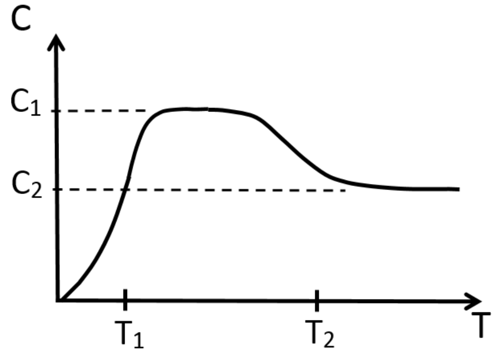


図３