京都大学大学院人間・環境学研究科修士課程入学試験 サンプル問題

専門科目
（142. 数理情報論）

問題 I,II は必答の問題、問題 III〜VI は選択式の問題 (選択すべき問題数は 2 問以上) を想定したものである。なお以下はあくまでもサンプル問題であり、実際の試験問題の出題形式はこれらとは異なる場合もある。

I． 次の語句から 3 つ選んでそれぞれ解答用紙の 5〜10 行程度の領域を使って説明せよ。

A) コンパイラ B) VPN C) 文脈自由文法 D) 一階述語論理
E) 最小全域木 F) SVM G) ノイマン型計算機 H) 遅延評価

II． 0,1 を要素とする配列 a とその要素数 n を入力とし、配列 a の中に出現するランの長さの最大値を求めるアルゴリズムを記述したプログラムを示せ。ここでランとは同じ値がつづく要素の列であり、ランの長さとはランを構成する要素の個数である。解答を記述するプログラミング言語は C、Fortran、Haskell、Java、Ruby、Scheme から一つ選択し、どの言語を選んだかを明記すること。アルゴリズムの効率は問わない。Haskell と Scheme の場合には配列の代わりにリストが与えられているとしてよい。細かい文法にはこだわらなくてもよい。適宜コメントを記すこと。

III． Σ_1, Σ_2 を記号の空でない集合とし、$L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*, f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ とする。$\hat{f}$ を $\hat{f}(\varepsilon) = \varepsilon$、$s = s_1 s_2 \ldots s_n \in \Sigma_1^*$ のとき $\hat{f}(s) = f(s_1)f(s_2)\ldots f(s_n)$ と定義する。さらに $\hat{f}(L_1) = \{\hat{f}(s) | s \in L_1\}$、$\hat{f}^{-1}(L_2) = \{s \in L_1 | \hat{f}(s) \in L_2\}$ と定義する。以下の命題について証明するか反例を挙げよ。

1) $\hat{f}(L_1)$ が正規言語であれば L_1 も正規言語である。

2) L_2 が正規言語であれば $\hat{f}^{-1}(L_2)$ も正規言語である。

IV． 次の古典一階述語論理の論理式が (a) 恒真かどうか、(b) 充足可能かどうかそれぞれ答え、恒真性・充足可能性の定義に従って理由を記せ。

1) $(\exists x \forall y\ p(x,y)) \to \exists x\ p(x, f(x))$

2) $(\exists x\ p(x, f(x))) \to \exists x \forall y\ p(x,y)$

V． 次の C に似た文法で書かれたプログラムについて答えよ。ただし、任意多倍長整数演算を行うものとする。

```
int f(int x, int y) {
    if(x == y || 2*x == y) return(1);
    return(f(4*x, y) + f(2*x, y));
}
```

1) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ が停止する (x,y) 全体の集合を求めよ。

2) x,y、整数、四則演算、冪乗、2 を底とする対数 $\log_2$、整数への切捨て、フィボナッチ関数 $\mathrm{fib}(\mathrm{fib}(0) = 0, \mathrm{fib}(1) = 1, \mathrm{fib}(2) = 1, \mathrm{fib}(3) = 2, ...)$ を用いて $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ を式で表せるか。なお必要であれば 1) の集合を有限個に分割し、それぞれにおいて異なる式で表現してもよい。集合を分割したのであれば分割後のそれぞれの集合も示した上で、$\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ を表す式を具体的に記述してそれが正しいことを示すか、できないことを証明せよ。

VI． 位数 2 の有限体 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 上の線形空間 ${\mathbb{F}_2}^k$ の元 $\boldsymbol{x}$ について、$w(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ のハミング重みとする。集合 $V_{k,i}$ を $V_{k,i} = \{\boldsymbol{x} \in {\mathbb{F}_2}^k \mid w(\boldsymbol{x}) = i\}$ と定義する。また m を 3 より大きい整数として、$W = V_{m,1} \cup V_{m,m-1}$ とする。W の元の個数を n とする。ここで H を W の全ての元を列ベクトルとして並べた m 行 n 列の行列とする。集合 $\mathcal{C}$ を $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} \in {\mathbb{F}_2}^n \mid H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と定義する。このとき以下の問いに答えよ。

1) m を用いて n を表せ。

2) $\mathcal{C}$ の元の個数を求めよ。

3) $\mathcal{C} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{3} V_{n,i} \right) = \emptyset$ を示せ。

4) $\mathcal{C}$ の相異なる 2 つの元の間のハミング距離の最小値を求めよ。