京都大学大学院 人間・環境学研究科修士課程入学試験問題例

専門科目 （１４１.現象数理論分野）

(注 意) 解答は、設問ごとに別の解答用紙を用いること。

次の３問の全てに解答しなさい。

I. 次の各問に答えよ。

(1) 自然数 n に対し、

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{c_n}{(n+1)!} \qquad (0 < c_n < e)$$

となる c_n が存在することを示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty} \cos(2\pi e\, n!) = 1$ を示せ。

(3) $f_n(x) = \sin(nx), \ \ x \in \mathbb{R}$ とする。
関数列 $\{f_n\}$ は一様収束する部分列を持たないことを示せ。

II.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形と、標準化行列を求めよ。

III.

自然数 n に対し、$P_n(x) = \dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく。次を示せ。

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases}$

(ii) $P_n(1) = 1$

京都大学大学院 人間・環境学研究科修士課程入学試験問題例

専門科目 （１４１.現象数理論分野）

(注 意) 解答は、設問ごとに別の解答用紙を用いること。

次の２問中１問に解答しなさい。

IV.　μ を $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度とし、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値ボレル可測関数の列であって、各点 $x \in \mathbb{R}$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が存在し、ある $\alpha > 1$ が存在して $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n|^\alpha d\mu < \infty$ とする。次のことを示せ。

(i)　$\int_{\mathbb{R}} |f|^\alpha d\mu < \infty$.

(ii)　$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{x\in\mathbb{R} \mid |f_n(x)|>c\}} |f_n| d\mu = 0$.

(iii)　$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu = 0$.

V.　$f(z) = e^{(i-1)z^2}$ を図の経路で積分することによって、定積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin(x^2) dx$$

の値を求めよ。