令和８年度 第１回 京都大学大学院人間・環境学研究科　修士課程入学試験問題

専門試験

科目名：011. 数理科学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字の I、II……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

問題は全部で４問あり２枚に記されている．I, II（１枚目）及び III, IV（２枚目）はいずれも必答問題である．**合計４問**に日本語で解答しなさい．

次の I，II（１枚目），III，IV（２枚目）の全てに解答しなさい．

I. 次の n 次実対称行列 A の階数を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_1a_2 & 1-a_2^2 & & -a_2a_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_1a_n & -a_2a_n & \cdots & 1-a_n^2 \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n),$$

すなわち A の (i,i) 成分は $1-a_i^2$ で，(i,j) 成分 $(i \neq j)$ は $-a_ia_j$ で与えられている．

II. $a>0$, $k>0$ を定数とする．広義積分

$$\iiint_D \frac{xyz}{(x+y+z+a)^k}\, dxdydz; \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x,\, y,\, z \geq 0\right\}$$

を考える．この広義積分が収束するような k の範囲を求めよ．また，そのときの積分の値を求めよ．必要ならば，変数変換

$$\begin{cases} u = x+y+z+a \\ v = y \\ w = z \end{cases}$$

を用いよ．

令和８年度 第１回 京都大学大学院人間・環境学研究科　修士課程入学試験問題

専門試験

科目名：011. 数理科学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のI、II……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

III. $f(t)$ を $[0,1] = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ 上の連続関数とし，$I = \{ai \in \mathbb{C} \mid -1 \leq a \leq 1\}$ とおく．ただし，i は虚数単位である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus I$ に対し

$$g(z) = \int_0^1 \frac{e^{tz}}{z^2 + t^2} f(t)\, dt$$

とおくと，関数 $g(z)$ は $\mathbb{C} \setminus I$ 上で正則であることを示せ．

(2) 問題の仮定のもと，さらに $f(t)$ は $[0,1]$ 上で 0 以上の値をとるとする．また，(1) の関数 $g(z)$ が $\mathbb{C}$ 上の正則関数に拡張できるとする．このとき，任意の $t \in [0,1]$ について $f(t) = 0$ となることを示せ．

IV. n を正の整数とする．f は $\mathbb{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可測関数で，任意の有界閉区間 I に対して

$$\int_I |f(x)|^n\, dx < \infty$$

を満たすものとする．また，Φ は $\mathbb{R}$ 上の C^n 級関数で，n 階導関数 $\Phi^{(n)}$ が有界であるものとする．このとき，任意の有界閉区間 I に対して

$$\int_I |\Phi(f(x))|\, dx < \infty$$

となることを示せ．