

令和 8 年度 第 1 回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目 (理科)

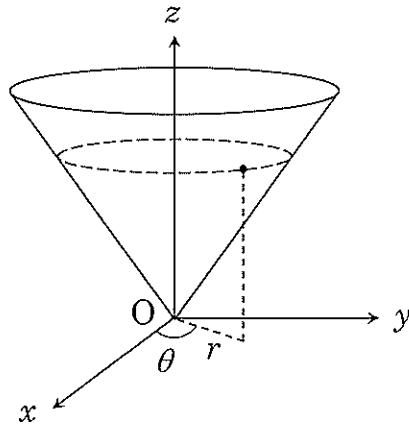
科目名: 物理学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

I. II. III. IV. の全問に日本語で解答せよ。

I. 鉛直上向きを z 軸とする xyz 空間において、図のように質量 m の質点が z 軸を軸とする円錐の内側表面を滑らかに運動している。質点の位置は円柱座標系の動径 r 、方位角 θ 、および z 座標で表すことができる。また、円錐面は $z = ar$ ($a > 0$) で与えられるとする。重力加速度を g として以下の問いに答えよ。



- (1) 3つの互いに直交する単位ベクトルを $e_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, $e_z = (0, 0, 1)$ と定義する。 e_r , e_θ , e_z を用いて、質点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ 、速度ベクトル $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ および角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ を表せ。
- (2) 質点のラグランジアンを求めよ。
- (3) 質点の角運動量の z 成分は保存することを示せ。
- (4) 保存量である角運動量の z 成分を ℓ とする。質点の全エネルギーを $r, \dot{r}$ および ℓ を含む式で表せ。
- (5) 全エネルギーは $\dot{r}$ のみに依存する項と r のみに依存する有効ポテンシャル $U(r)$ から構成されている。有効ポテンシャル $U(r)$ を求めよ。また、そのグラフの概形を描け。
- (6) 質点が等速円運動をする場合を考える。このときの軌道半径 $r = r_0$ を保存量 ℓ を含む式で表せ。
- (7) (6) の等速円運動から軌道が少しずれると、軌道半径 r は微小振動を示す。微小振動の周期を求めよ。また、微小振動の周期が (6) で考えた等速円運動の周期と一致する a の値を求めよ。

令和 8 年度 第 1 回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目 (理科)

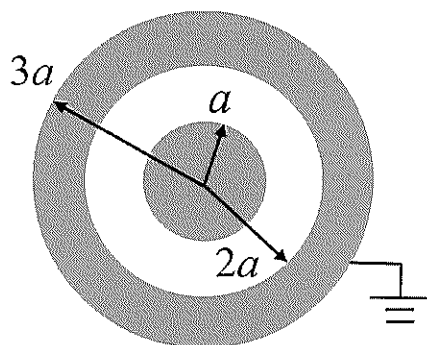
科目名：物理学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II ……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

II. 真空中に置かれた半径 a の球体の中心からの距離を r とする。球体に正電荷 Q を与えたときの電場の大きさ $E(r)$ と電位 $V(r)$ について考察する。真空の誘電率を ϵ_0 , $V(\infty) = 0$ とする。

- (1) 球体が導体である場合の $E(r)$ と $V(r)$ を求め、グラフに図示せよ。
- (2) 電荷を球体内部に一様に分布させた場合の $E(r)$ と $V(r)$ を求め、グラフに図示せよ。
- (3) 下図のように、半径 a の導体球に正電荷 Q を与える。この球体を、内径 $2a$ 、外径 $3a$ の帯電していない同心導体球殻で囲み、その後さらに接地する。 $E(r)$ と $V(r)$ を求め、グラフに図示せよ。



令和 8 年度 第 1 回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目 (理科)

科目名：物理学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

III. 2 次元のポテンシャルエネルギー

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & (-a < x < a, -a < y < a) \\ \infty & (a < |x|, a < |y|) \end{cases}$$

の下で運動する電子について考える。ここで、 $a > 0$ である。この電子のシュレーディンガー方程式は、電子の質量を m として

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y) + V(x, y) \Phi(x, y) = E \Phi(x, y)$$

と表される。ここで $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったもの、 E はエネルギー固有値、 $\Phi(x, y)$ は固有関数である。 $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ とおくと $-a < x < a$ 、 $-a < y < a$ の各領域において

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = \varepsilon_X X(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = \varepsilon_Y Y(y)$$

がそれぞれ成り立つ。ここで、 $E = \varepsilon_X + \varepsilon_Y$ である。以下の問いに答えよ。
必要であれば次の公式を用いてもよい。

$$\int x \sin(bx) dx = -\frac{x}{b} \cos(bx) + \frac{1}{b^2} \sin(bx) + C$$

$$\int x \cos(bx) dx = \frac{x}{b} \sin(bx) + \frac{1}{b^2} \cos(bx) + D$$

ここで C, D は積分定数である。

- (1) $X(x)$ の満たすべき境界条件を説明し、固有エネルギー ε_X と固有関数 $X(x)$ を求めよ。固有関数 $X(x)$ は規格化しなくてもよい。
- (2) (1) の結果をもとに、2 次元ポテンシャルエネルギー中の電子の基底状態、第 1 励起状態、第 2 励起状態についてエネルギー固有値と固有関数を求めよ。固有関数は規格化すること。
- (3) $-a < x < a$ 、 $-a < y < a$ におけるポテンシャルエネルギーに、小さな摂動項 γxy が加わったとする。ここで、 γ は正の実数である。1 次の摂動論による基底状態のエネルギー変化について論ぜよ。
- (4) (3) と同じ摂動項による第 1 励起状態のエネルギー変化を、1 次の摂動論で求めよ。

令和 8 年度 第 1 回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目 (理科)

科目名: 物理学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

IV. スピン S をもつ原子 N 個からなる系がある。 z 軸をスピンの量子化軸にとると、各原子のスピンの z 成分 m が取りうる値は、 $m = -S, -S+1, \dots, S-1, S$ である。スピン間の相互作用は無視できるとする。この系に一樣な磁場を z 軸方向にかけたとき、ハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H = g\mu_B B \sum_{j=1}^N m_j$$

ここで、 μ_B はボーア磁子、 g は電子の g 因子、 B は磁束密度の大きさ、 m_j は j 番目のスピンの z 成分の値である。系が温度 T の熱浴に接して熱平衡状態にあるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 分配関数 Z が次式で与えられることを示せ。ただし、 k_B をボルツマン定数として、 $\beta = 1/(k_B T)$ である。

$$Z = \left[\frac{\sinh(\beta g \mu_B B (S + \frac{1}{2}))}{\sinh(\frac{1}{2} \beta g \mu_B B)} \right]^N$$

- (2) この系の物理量 A の期待値を $\langle A \rangle$ で表すとして、磁化を次式によって定義する。

$$M = -g\mu_B \left\langle \sum_{j=1}^N m_j \right\rangle$$

M が次式で定義される関数

$$f(x, J) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right)$$

を用いて、下記のように書けることを示せ。

$$M = Ng\mu_B S f(\beta g \mu_B B S, S)$$

- (3) $g\mu_B B S \ll k_B T$ のとき、 $f(\beta g \mu_B B S, S) \simeq (S+1)\beta g \mu_B B/3$ と近似できる。このとき、

$$M \simeq \frac{C}{T} B \quad (i)$$

である。 C を求めよ。

次に、スピン間に相互作用が存在し、系が有限温度で強磁性状態に 2 次相転移する場合を現象論的に考える。磁化 M の存在によって生じる分子場を $b(M)$ とすると、分子場 $b(M)$ は外部磁場と同様に磁化 M を生じさせるから、式 (i) は次式で置き換えられる。

$$M = \frac{1}{T} [CB + b(M)] \quad (ii)$$

(設問 IV は、次ページに続く)

令和 8 年度 第 1 回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目（理科）

科目名：物理学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のⅠ、Ⅱ……）ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

転移温度を T_c とすると、 T_c 近傍では磁化 M が小さいため、 $b(M)$ は a 、 c を定数として

$$b(M) = aM + cM^3$$

と近似できる。

(4) 強磁性体の場合 $a > 0$ であり、強磁性転移が 2 次相転移であることから $a = T_c$ となることを説明せよ。

(5) 系の自由エネルギーを F とすると、以下の関係式が成り立つ。

$$B = \left(\frac{\partial F}{\partial M} \right)_T$$

この式と式 (ii) から F を求め、 $c < 0$ であることを説明せよ。また、 $T > T_c$ と $T < T_c$ における F の M 依存性を図示せよ。