

令和8年度 第2回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門試験

科目名：011. 数理科学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のI, II……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

問題は全部で4問あり2枚に記されている。I, II（1枚目）及びIII, IV（2枚目）はいずれも必答問題である。合計4問に日本語で解答しなさい。

次のI, II（1枚目）、III, IV（2枚目）の全てに解答しなさい。

I. f を区間 $[0, \infty)$ 上の一様連続な実数値関数とする。広義積分 $\int_0^{\infty} f(x) dx$ が収束するならば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ となることを示せ。

II. a, b を0でない実数、 n を正の整数とする。次の n 次正方行列 A のすべての固有値と、それに対応する固有ベクトルからなる \mathbb{R}^n の正規直交基底を1組求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a+b \end{pmatrix},$$

すなわち A の (i, i) 成分は $a+b$ で、 (i, j) 成分 ($i \neq j$) は b で与えられている。

令和8年度 第2回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門試験

科目名：011. 数理科学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字の I, II, ……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

III. $0 < a < b$ とする. 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

について, 以下の問に答えよ.

- (1) この広義積分は収束することを示せ.
- (2) 留数計算を用いてこの値を求めよ.

IV. \mathbb{R} 上の複素数値連続関数 h に対して, $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$ の, \mathbb{R} における閉包を h の台といい, $\text{supp } h$ と表す. \mathbb{R} 上の複素数値連続関数で, その台が \mathbb{R} のコンパクト集合であるようなものの全体の集合を $C_0(\mathbb{R})$ と表す.

$0 < p < 1$ とする. 任意の $h \in C_0(\mathbb{R})$ に対して, $\|h\|_p$ を

$$\|h\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

で定める. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p, \\ \|f + g\|_p &\leq 2^{(1-p)/p} (\|f\|_p + \|g\|_p) \end{aligned}$$

が成立することを示せ.

- (2) $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ はどちらも恒等的に 0 ではなく, $\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset$ を満たすとする. このとき,

$$\|f + g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p$$

が成立することを示せ.