令和８年度　第２回　京都大学大学院人間・環境学研究科　修士課程入学試験問題

専門科目（理科）

科目名：物理学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のⅠ、Ⅱ……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

I. II. III. IV. の全問に日本語で解答せよ。

I. 下図左のように質量 m の物体が，質量の無視できる長さ ℓ のひもで天井からつるされている．鉛直軸とひもの角度を θ，物体の鉛直軸まわりの回転角を ϕ とする．物体には鉛直方向下向きに一様な重力が働いている．重力加速度は g とする．以下の問いに答えよ．

(1) この物体を質点としたとき，一般化座標 θ, ϕ について，物体のラグランジアンを求めよ．

(2) 一般化座標 θ, ϕ に対する運動方程式を導け．

(3) 物体が鉛直軸回りに等速円運動しているとき，鉛直軸からの角度 θ は θ_0 で一定であった．この等速円運動の周期 T_0 を g, ℓ, θ_0 を用いて表せ．

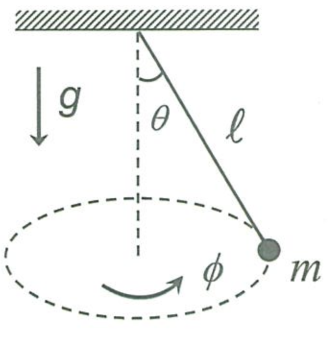
以下では，下図右のように，ひもでつるされた質量 m の物体の運動が支点を通るある１つの鉛直面内に限定され，一般化座標 θ のみで扱える場合を考える．

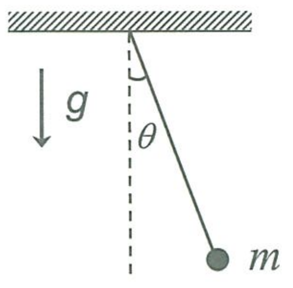
(4) $|\theta| \ll 1$ として物体が質点である場合の運動方程式を示し，生じる周期運動の周期 T_1 を求めよ．支点から質点までの距離は ℓ とする．

下図右において，物体が質点ではなく，半径 r の一様な密度をもつ球の場合について考える．天井の支点から球の中心までの距離を ℓ とする．ただし，$\ell \gg r$ とする．この球の中心軸回りの慣性モーメントは $\frac{2}{5}mr^2$ である．運動中において，球の中心は常につるしているひもの延長線上にあり，ひもを軸とする球の回転運動は考えないものとする．

(5) $|\theta| \ll 1$ として球の運動方程式を示し，周期運動の周期 T_2 を $\dfrac{r}{\ell}$ の２次までの近似で求めよ．

(6) 物体を質点とみなした (4) の場合の T_1 と，物体を球とした（5）の場合の T_2 の差はどれほどか．およその値を $\ell = 1$ m，$r = 10$ cm の場合について求めよ．





令和８年度　第２回　京都大学大学院人間・環境学研究科　修士課程入学試験問題

専門科目（理科）

科目名：物理学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のⅠ、Ⅱ……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

Ⅱ. 真電荷が存在しない一様な導体中におけるマクスウェル方程式は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{D}$ は電束密度，$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{H}$ は磁場，$\boldsymbol{j}$ は電流密度を表す．導体の誘電率を ϵ, 透磁率を μ, 電気伝導度を σ とする．また，導体中では $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$ という関係が成り立っている．ϵ, μ, σ は定数であるとして，以下の問いに答えよ．

(1) 導体中の電場 $\boldsymbol{E}$ が，以下の方程式を満たすことを示せ．

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\sigma\,\mu\,\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\epsilon\,\mu\,\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

必要ならば，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して成り立つ公式，$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}$ を使ってよい．

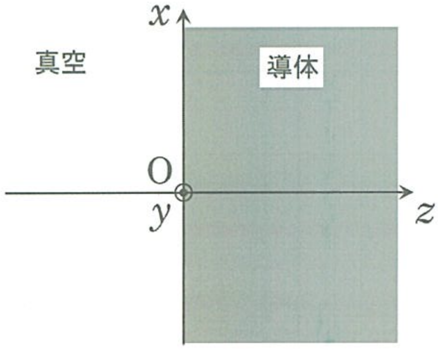
(2) (1) の方程式を満たす電磁波として，ここでは電場が x 軸方向に偏極し，下図のように $z<0$ の真空中から $z\geq 0$ の領域に広がる導体中に垂直入射して進む平面波，

$$\boldsymbol{E}=(E_x(z,t),0,0\,),\qquad E_x(z,t)=\mathrm{Re}\,[E_0\,e^{\,i\,(\omega t-\kappa z)}\,],\qquad z\geq 0$$

を考える．ここで E_0 は導体に入射した直後の電場の初期振幅（実定数）とし，Re[　] は [　] 内の実数部分を表す．また，角周波数 ω は実数であるが，κ は複素数で $\kappa=\beta-i\alpha$ (α,β はともに実数) である．α^2 を σ, ϵ, μ, ω を用いて表せ．

(3) 良導体（$\sigma\gg\epsilon\omega$）の場合，α と β を求め，導体中の電場の振幅が E_0 の e^{-1} になる距離を σ, μ, ω を用いて表せ．また，導体中での電場の振幅が位置 $z\,(z\geq 0)$ とともにどのように変化するか，その概形を描け．

(4) (3) と同じ良導体の条件が成り立つ場合，導体中での磁場 $\boldsymbol{H}$，および導体中での $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{E}$ の位相差を求めよ．$\boldsymbol{H}$ の式は複素数を用いて表してもよい．



令和８年度　第２回　京都大学大学院人間・環境学研究科　修士課程入学試験問題

専門科目（理科）

科目名：物理学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のⅠ、Ⅱ……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

Ⅲ. 質量 m，電荷 $q\,(>0)$ の粒子の電磁場中でのハミルトニアン $\mathcal{H}$ は，ベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}$，スカラーポテンシャルを ϕ とすると，

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-q\boldsymbol{A}\right)^2+q\phi$$

で与られる．ここで $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである．χ を任意のスカラー関数とすると，ゲージ変換により，波動関数 Ψ は $\Psi'=u\Psi$ (ただし，$u=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}q\chi\right)$ とする) に変換され，$\boldsymbol{A}$, ϕ も次式のように変換される．

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-\nabla\chi\\ \phi'=\phi+\frac{\partial}{\partial t}\chi\end{cases}$$

上記の $\boldsymbol{A}$，ϕ，Ψ，Ψ'，u, χ はいずれも座標 $\boldsymbol{r}$ と時間 t の関数である．以下の問いに答えよ．

(1) 電場 $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ は，ゲージ変換に対して不変であることを示せ．

(2) $(\frac{\hbar}{i}\nabla-q\boldsymbol{A}')\Psi'=u\,(\frac{\hbar}{i}\nabla-q\boldsymbol{A})\Psi$ であることを示せ．

(3) $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\mathcal{H}\Psi$ より, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi'=\mathcal{H}'\Psi'$ となることを示せ．ただし，$\mathcal{H}'$ は以下の式で与えられる．

$$\mathcal{H}'=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-q\boldsymbol{A}'\right)^2+q\phi'$$

(4) 図１のように，上述の粒子が粒子源からスリットを経てスクリーン上の固定点Ｐに到達する場合を考える．ベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャルが共にゼロの場合，粒子が紙面上の経路 C_1 を経て点Ｐに到達するときの波動関数を Ψ_1，紙面上の経路 C_2 を経て点Ｐに到達するときの波動関数を Ψ_2 とする．この場合，点Ｐでの粒子の検出頻度は $|\Psi_1+\Psi_2|^2$ で与えられる．次に，図２のように，２つのスリットの間にソレノイドがある場合を考える．ソレノイドの軸は紙面に垂直で，ソレノイドの内部にのみ磁束 $\varPhi$ が生じているとする．ソレノイド内の磁場の方向は紙面奥から手前に向いているものとする．このとき，点Ｐでの粒子の検出頻度を $\Psi_1,\Psi_2,\varPhi$ などを用いて表せ．

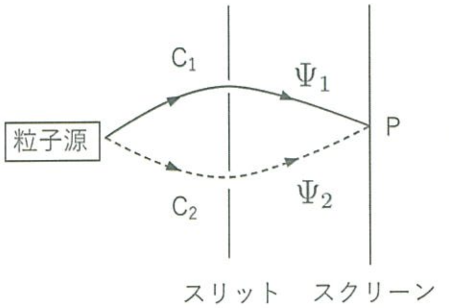


図1

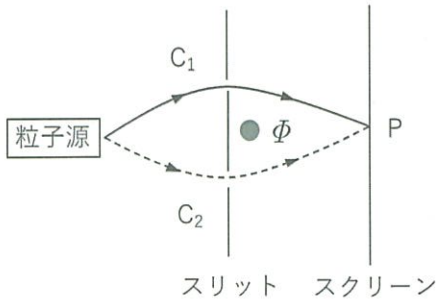


図2

令和８年度　第２回　京都大学大学院人間・環境学研究科　修士課程入学試験問題

専門科目（理科）

科目名：物理学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のⅠ、Ⅱ……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

Ⅳ. N 個のスピンが１次元的に配列した系がある．各スピンは上向きまたは下向きの２つの状態をとりうるものとする．この系では隣り合うスピン間に相互作用があり，ハミルトニアン H_N は以下のように表される．

$$H_N = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

ここで，J はスピン間の相互作用を表し，$J > 0$ である．σ_i は i 番目のスピンの向きを表し，上向きスピンまたは下向きスピンに対応して，それぞれ１または -1 の値をとる．また，N は２以上の整数である．系が絶対温度 T の熱浴と熱平衡状態にあるとき分配関数 Z_N は

$$Z_N = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp\left(-\beta H_N\right)$$

と表される．ここで，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$，$k_{\mathrm{B}}$ はボルツマン定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $N = 2, 3$ の場合について，分配関数 Z_2 と Z_3 を求めよ．

(2) Z_N について，漸化式 $Z_{N+1} = (\exp(\beta J) + \exp(-\beta J))\, Z_N$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) の漸化式を使って Z_N を求め，この系の熱容量 C を求めよ．

(4) この系のエントロピー S を求めよ．また，低温極限（$k_{\mathrm{B}}T \ll J$ ）と高温極限（$k_{\mathrm{B}}T \gg J$）における S の近似式を求めよ．

(5) $1 \leq p < q \leq N$ を満たす整数 p, q に対して，$\sigma_p \sigma_q$ の期待値 $\langle \sigma_p \sigma_q \rangle$ は，低温極限と高温極限においてどのように振る舞うか，理由とともに説明せよ．