

専門試験

科目名：012. 情報科学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

問題 I,II は必ず解答せよ。さらに問題 III～問題 VI から 2 問選択して解答せよ。解答はすべて日本語で記述せよ。

- I . 次の語句から 3 つ選んでそれぞれ解答用紙の 5～10 行程度の領域を使って説明せよ。
 A) Attention 機構 B) デバイスドライバ C) 暗号的ハッシュ関数 D) 証明支援系
 E) 同値関係と商集合 F) フリップフロップ G) 可逆圧縮と非可逆圧縮 H) ナッシュ均衡

- II . 次の BNF 記法で書かれた言語 $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ を考える。

$$\langle A \rangle ::= * \langle A \rangle \langle A \rangle \mid - \langle A \rangle \langle A \rangle \mid \langle D \rangle$$

$$\langle B \rangle ::= \langle B \rangle \langle B \rangle * \mid \langle B \rangle \langle B \rangle - \mid \langle D \rangle$$

$$\langle D \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$$

以下の (1),(2) について、そのアルゴリズムを記述したプログラムをそれぞれ作成せよ。解答を記述するプログラミング言語は C、Haskell、Java、Python、Ruby、Scheme のうちいずれか 1 つを選択し、解答にどの言語を選んだかを明記せよ。(1),(2) について必ずしも同一の言語を選ばなくてもよい。プログラムでは、まず先頭にアルゴリズム全体の概略をコメントとして記述し、他の部分にも適宜コメントを付記せよ。プログラムの文法の正確さについては細部まで厳密にはこだわらなくてもよい。

- (1) $\langle A \rangle$ に属する文字列が与えられたとき、下の例のように、それを前置記法の数式と解釈して、それを評価した結果の値を求める。

- $\langle A \rangle$ の文字列と評価結果の値の例

$$- * 235 \rightarrow 1$$

$$-2 * 35 \rightarrow -13$$

- (2) $\langle B \rangle$ に属する文字列が与えられたとき、下の例のように、それを後置記法の数式と解釈して、それを評価した結果の値を求める。

- $\langle B \rangle$ の文字列と評価結果の値の例

$$235 - * \rightarrow -4$$

$$23 * 5 - \rightarrow 1$$

専門試験

科目名：012. 情報科学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問(ローマ数字のⅠ、Ⅱ……)ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

Ⅲ. $m \geq 1$ を整数とし、 $c, a_j, w_j, b_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) とする。シグモイド関数を $\sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$ により表す。入力層と出力層のユニット数がそれぞれ一つで、ユニット数が m の隠れ層が一つのニューラルネットワークを、入力を x として、 $N(x) = c + \sum_{j=1}^m a_j \sigma(w_j x + b_j)$ により表す。 $N(x)$ により、閉区間 $[-1, 1]$ 上の関数 $f(x) = x^3$ を近似することを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $t = 0$ でのテイラー展開によって $\sigma(t) = \frac{1}{2} + At + Bt^3 + r(t)$ と表す。このとき、 A, B の値を求めよ。また、 $|t| \leq 1$ において $|r(t)| \leq K|t|^5$ が成り立つ定数 K の最小値を求めよ。必要に応じて、 $\sigma'(t) = \sigma(t)(1 - \sigma(t))$ であること、 $|t| \leq 1$ において $|\sigma^{(5)}(t)| \leq \frac{1}{4}$ であることを用いてよい。
- (2) 整数 $n \geq 2$ に対して、ニューラルネットワーク $N_n(x) = 16n^3 \sigma(\frac{x}{n}) - 8n^3 \sigma(\frac{2x}{n}) - 4n^3$ を定める。最大絶対誤差を $E_n = \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - N_n(x)|$ と表す。(1)の剰余評価を用いて E_n を不等式評価し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ の値を求めよ。また、同様の剰余評価に基づく不等式評価により $E_n \leq \frac{1}{100}$ が保証される最小の整数 n を求めよ。

Ⅳ. Σ を有限アルファベットとし、 $\hat{\Sigma} = \Sigma \times \{1, 2\}$ とする。記号 c と文字列 t に対して、 $c \cdot t$ で c と t の連結を表す。 $i \in \{1, 2\}$ に対し、射影 $\pi_i : \hat{\Sigma}^* \rightarrow \Sigma^*$ を次のように定義する。

$$\pi_i(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \pi_i((a, j) \cdot w) = \begin{cases} a \cdot \pi_i(w) & (i = j) \\ \pi_i(w) & (i \neq j) \end{cases}$$

また、 $\text{erase} : \hat{\Sigma}^* \rightarrow \Sigma^*$ を次のように定義する。

$$\text{erase}(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \text{erase}((a, j) \cdot w) = a \cdot w$$

言語 $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ に対し、

$$S(L_1, L_2) = \left\{ \text{erase}(w) \mid w \in \hat{\Sigma}^*, \pi_1(w) \in L_1, \pi_2(w) \in L_2 \right\}$$

および

$$S_=(L_1, L_2) = \left\{ \text{erase}(w) \mid w \in \hat{\Sigma}^*, \pi_1(w) \in L_1, \pi_2(w) \in L_2, |\pi_1(w)| = |\pi_2(w)| \right\}$$

と定義する。以下の問いに答えよ。

- (1) $\Sigma = \{a, b\}$, $L_1 = a^*$, $L_2 = b^*$ のとき、 $S(L_1, L_2)$ を求めよ。
- (2) L_1, L_2 が正規言語であるとき、 $S(L_1, L_2)$ は正規言語であることを示せ。
- (3) $\Sigma = \{a\}$ であり、 L_1, L_2 が正規言語であるとき、 $S_=(L_1, L_2)$ は正規言語であることを示せ。
- (4) 正規言語 L_1, L_2 に対して、 $S_=(L_1, L_2)$ は必ずしも正規言語であるとは限らないことを示せ。

専門試験

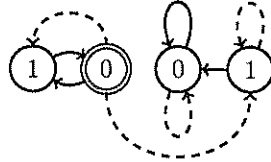
科目名：012. 情報科学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

V. 定数記号 c と 1 変数関数記号 f と 1 変数述語記号 P と 2 変数述語記号 R からなる等号付き一階述語論理の言語 $\mathcal{L}$ を考える。空でない集合 S , $c^\mathfrak{S} \in S$, $f^\mathfrak{S}: S \rightarrow S$, $P^\mathfrak{S} \subseteq S$, $R^\mathfrak{S} \subseteq S \times S$ からなる組 $\mathfrak{S} = (S; c^\mathfrak{S}, f^\mathfrak{S}, P^\mathfrak{S}, R^\mathfrak{S})$ を $\mathcal{L}$ 構造と呼ぶ。 $\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{S}$ と $\mathcal{L}$ の文 φ の充足関係 $\mathfrak{S} \models \varphi$ を通常通りに定義する。

$\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{S}$ を次のようにラベル付き有向多重グラフとして表記する。各 $x \in S$ を頂点とみなし、 $c^\mathfrak{S}$ に対応する頂点を二重丸で表記し、その他の頂点を一重丸で表記する。 $x \in S$ のラベルは 0 か 1 のいずれかであり、 $\neg P^\mathfrak{S}(x)$ のときに 0、 $P^\mathfrak{S}(x)$ のときに 1 と定める。 $x, y \in S$ に対し $f^\mathfrak{S}(x) = y$ が成り立つとき、そしてそのときに限り、頂点 x から y への辺を実線で表記する。 $x, y \in S$ に対し $R^\mathfrak{S}(x, y)$ が成り立つとき、そしてそのときに限り、頂点 x から y への辺を破線で表記する。例えば、 $S = \{p, q, r, s\}$, $c^\mathfrak{S} = q$, $f^\mathfrak{S}(p) = q$, $f^\mathfrak{S}(q) = p$, $f^\mathfrak{S}(r) = r$, $f^\mathfrak{S}(s) = r$, $P^\mathfrak{S} = \{p, s\}$, $R^\mathfrak{S} = \{(q, p), (q, s), (r, r), (s, s)\}$ のとき、 $\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{S} = (S; c^\mathfrak{S}, f^\mathfrak{S}, P^\mathfrak{S}, R^\mathfrak{S})$ は次のように表記される。



次のように $\mathcal{L}$ の文 $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ を定義する。

$$\theta_0 \equiv P(c) \wedge \forall x.(f(f(x)) = f(c) \wedge (P(x) \rightarrow \neg P(f(x))))$$

$$\theta_1 \equiv \forall x.\forall y.(R(x, y) \leftrightarrow (f(x) = f(y) \wedge \neg(x = y)))$$

$$\theta_2 \equiv \forall x.\forall y.\forall z.((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow x = z)$$

次の (1)~(3) の文のそれぞれについて、その文を充足する有限な $\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{S}$ をラベル付き有向多重グラフとして表記するか、その文を充足する有限な $\mathcal{L}$ 構造が存在しないことを証明せよ。

$$(1) \theta_0 \wedge (\exists x.f(x) = c)$$

$$(2) \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge (\exists x.\exists y.(\neg R(x, y) \wedge R(f(x), f(y)))) \wedge (\forall x.((\forall y.\neg R(x, y)) \rightarrow x = c))$$

$$(3) P(c) \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge (\forall x.\exists y.R(x, y)) \wedge (\forall x.(P(x) \leftrightarrow \neg P(f(x)))) \wedge \neg(f(f(c)) = c)$$

専門試験

科目名：012. 情報科学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問(ローマ数字のⅠ、Ⅱ……)ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

Ⅵ. 位数2の有限体 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 上の k 行 ℓ 列の行列全体の集合を $\mathbb{F}_2^{k \times \ell}$ と表す ($k, \ell \geq 1$)。 $X \in \mathbb{F}_2^{k \times \ell}$ に対して、 ${}^tX$ で X の転置行列を表す。 $p \in \mathbb{F}_2$ に対して、 $C_p^{(k, \ell)}$ で全ての成分が p である $\mathbb{F}_2^{k \times \ell}$ の元を表す。以下では、このように全ての成分が同じである行列を定数行列とよぶ。 $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_k), y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{F}_2^{k \times 1}$ に対して、 $x \odot y = {}^t(x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_k y_k) \in \mathbb{F}_2^{k \times 1}$ を x と y のアダマール積とよぶ。アダマール積は結合則を満たす。

正の整数 n と $0 \leq m \leq n$ を満たす整数 m に対して、 $\mathbb{F}_2$ 上の行列 $B_{n,m}$ を以下のように定義する。

(i) $m = 0$ の場合

$$B_{n,0} = C_1^{(2^n, 1)}$$

(ii) $m = 1$ の場合

$B_{n,1} \in \mathbb{F}_2^{2^n \times n}$ であり、 $B_{n,1}$ の i 番目の行ベクトル ($i = 1, 2, \dots, 2^n$) の成分 $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}$ を順に並べたビット列 $b_{i1}b_{i2} \cdots b_{in}$ が、 $i-1$ の2進展開となっている。

(iii) $2 \leq m \leq n$ の場合

$B_{n,1}$ の k 番目の列ベクトルを $b_k^{(n)}$ と表す ($k = 1, 2, \dots, n$)。また $S_{n,m} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}^m$ を

$$S_{n,m} = \{(i_1, i_2, \dots, i_m) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n\}$$

と定義すると、 $B_{n,m} \in \mathbb{F}_2^{2^n \times |S_{n,m}|}$ であり、 $S_{n,m}$ のすべての元を辞書式順序で並べたときに j 番目に位置する元を $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ と表すと、その元によって、 $B_{n,m}$ の j 番目の列ベクトルは、次のように表される。

$$b_{j_1}^{(n)} \odot b_{j_2}^{(n)} \odot \cdots \odot b_{j_m}^{(n)} \quad (j = 1, 2, \dots, |S_{n,m}|)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $B_{3,0}, B_{3,1}, B_{3,2}, B_{3,3}$ をそれぞれ成分を書き下して示せ。
- (2) $B_{n,n}$ を成分によって示せ。なお意味が明らかであれば、成分の一部を省略して記してもよい。
- (3) $n > 1$ のとき、 $B_{n-1,1}$ および定数行列を用いて $B_{n,1}$ を表せ。
- (4) $1 < m < n$ のとき、集合 $\{B_{n-1,0}, B_{n-1,1}, \dots, B_{n-1,m}\}$ の元1つ以上と定数行列を用いて $B_{n,m}$ を表せ。