令和９年度 第１回 京都大学大学院人間・環境学研究科　修士課程入学試験問題

専門試験

科目名：011. 数理科学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のI、II……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

問題は全部で４問あり２枚に記されている．I，II（１枚目）及びIII，IV（２枚目）はいずれも必答問題である．**合計４問**に日本語で解答しなさい．

次のI，II（１枚目），III，IV（２枚目）の全てに解答しなさい．

I. N を正の整数とする．N 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & N & N-1 & \cdots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & N & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 5 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ N-1 & N-2 & N-3 & \cdots & 1 & N \\ N & N-1 & N-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．すなわち A の (i,j) 成分を a_{ij} で表すと，$i \geq j$ のときには $a_{ij} = i-j+1$，$i < j$ のときには $a_{ij} = i-j+1+N$ で定められている．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 第１成分が１であるような A の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{N-2} \\ a^{N-1} \end{pmatrix}$$

のような形で与えられることが知られている．そのような複素数 a が満たすべき条件を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

II. $\mathbb{R}$ の開区間 I 上の実数値関数 f が凸である，すなわち f は

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y), \quad x, y \in I, \quad \theta \in [0,1]$$

を満たすとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) f は I 上連続であることを示せ．

(2) 任意の $x \in I$ に対し，f の x における右側微分 $f'_+(x)$，左側微分 $f'_-(x)$ がそれぞれ存在し，$f'_-(x) \leq f'_+(x)$ となることを示せ．

令和９年度 第１回 京都大学大学院人間・環境学研究科　修士課程入学試験問題

専門試験

科目名：011. 数理科学

（注意）複数の設問がある場合、解答は、設問（ローマ数字のI、II……）ごとに別の解答用紙を用いること。
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

III. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を正則関数とする．また $0<\alpha<1$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha}f\left(\frac{1}{n}z\right)-n^{\alpha}f(0)-f'(0)n^{\alpha-1}z\right)$ が $\mathbb{C}$ 上収束することを示せ．

(2) $\displaystyle g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha}f\left(\frac{1}{n}z\right)-n^{\alpha}f(0)-f'(0)n^{\alpha-1}z\right)$ $(z\in\mathbb{C})$ とおくとき，関数 g は $\mathbb{C}$ 上正則であることを示せ．

(3) (2) で与えられた g が定数関数であるとする．このとき，ある $a,b\in\mathbb{C}$ によって

$$f(z)=az+b\quad(z\in\mathbb{C})$$

となることを示せ．

IV. $\lambda>0$，$x\in\mathbb{R}$ に対して，$G_\lambda(x)$ を

$$G_\lambda(x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}(4\pi t)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)dt$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ における $\lambda G_\lambda(x)-G_\lambda''(x)$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}G_\lambda(x)\,dx$ を計算せよ．

(3) $f\in C_0(\mathbb{R})$，すなわち f は $\mathbb{R}$ 上の連続関数で，コンパクトな台をもつものとする．$\lambda>0$，$x\in\mathbb{R}$ に対して，$(G_\lambda * f)(x)$ を

$$(G_\lambda * f)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G_\lambda(x-y)f(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}G_\lambda(z)f(x-z)\,dz$$

で定める．このとき，

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\|\lambda G_\lambda * f-f\|_{L^1(\mathbb{R})}=0$$

が成立することを示せ．ただし，$\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ は $L^1(\mathbb{R})$ のノルムである．