

令和 9 年度 第 1 回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目 (理科)

科目名：物理学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

I. II. III. IV. の全問に日本語で解答せよ。

I. 一様な線密度 σ の弦を張力 T で張る。弦の長さ方向に z 軸をとる。変位は 1 次元的で z 軸に垂直な横方向のみとし、時刻 t 、位置 z における弦の変位を $u(z, t)$ と表す。変位は十分小さいものとする。張力 T の大きさは変位によらず一定とし、また、 T は十分大きく弦に働く重力の影響は無視できるものとする。説明に必要であれば、図などを用いて解答してよい。

(1) 位置が z と $z + \Delta z$ の間にある弦の微小部分に働く力は、近似的に $T\{u_z(z + \Delta z, t) - u_z(z, t)\}$ と表されることを示せ。ここで、 $u_z(z, t)$ は $u_z(z, t) = \frac{\partial}{\partial z}u(z, t)$ を表す。

(2) 弦を伝わる横波を記述する波動方程式 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(z, t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}u(z, t)$ を導き、 v を σ , T で表せ。さらに、 v の物理的意味を述べよ。

次に、有限の長さ L の弦を考える。弦の両端は $z = \pm L/2$ にあり、これらの点で弦を固定し、さらに、弦の中央 $z = 0$ に質量 m の質点を取りつける。張力 T は十分大きく、中央の質点に働く重力は無視できるものとする。この弦の基準振動について考える。基準振動は $z = 0$ に関して対称な振動と反対称な振動に分類される。基準振動の解を $u(z, t) = X(z) \cos(\omega t + \delta)$ とおく。ここで、 ω は基準振動の角振動数、 δ は初期位相を表す。質点が付加された $z = 0$ を除き、空間部分の関数 $X(z)$ は微分方程式

$$\frac{d^2 X(z)}{dz^2} + k^2 X(z) = 0 \quad (\text{i})$$

を満たす。ここで、 $k = \frac{\omega}{v}$ である。

(3) $z = 0$ に関して反対称な基準振動は、中央に質点を付加しなかった場合の基準振動とまったく同じである。その理由を説明し、 $z = 0$ に関して反対称な基準振動が取りうる k の値を示し、角振動数が最も低い場合に対応する空間部分の関数 $X(z)$ の概形を描け。

以下では、 $z = 0$ に関して対称な基準振動を考える。微分方程式 (i) の $z > 0$ での解を $X_+(z)$ 、 $z < 0$ での解を $X_-(z)$ とする。このとき $z = 0$ における弦の連続性より、 $X_+(+0) = X_-(-0)$ が成り立つ。弦の両端が固定端である条件 $X_+(L/2) = X_-(-L/2) = 0$ を考慮すると、 A を実定数として、 $X_+(z) = A \sin\{k(z - L/2)\}$ と表せる。

(4) 与えられた $X_+(z)$ の式より、 $X_-(z)$ を求めよ。 $z = 0$ の質点には両側の弦から張力が働く。時刻 t において質点に働く合力を求めよ。

(5) 対称な基準振動の角振動数を ω_s とすると、 $k_s = \omega_s/v$ として、

$$\frac{k_s L}{2} \tan\left(\frac{k_s L}{2}\right) = \frac{\sigma L}{m}$$

が成り立つことを、付加した質点の運動方程式から導け。

(6) 対称な基準振動のうち、2 番目に低い角振動数をもつ $X(z)$ の概形を実線で描け。中央に質点を付加しなかった場合の基準振動のうち、 $z = 0$ に関して対称で 2 番目に低い角振動数をもつ振動の空間部分の概形を、同じグラフ上に点線で重ねて描け。

令和 9 年度 第 1 回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目 (理科)

科目名：物理学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II……) ごとに別の解答用紙を用いること。

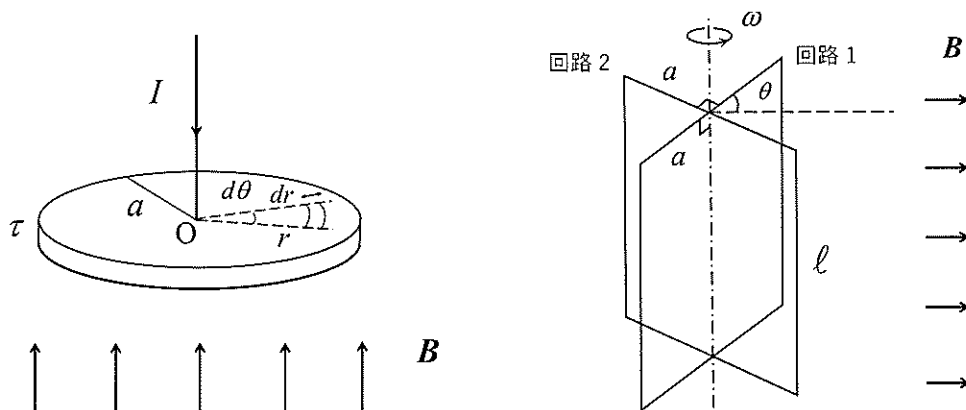
ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

II. 下図左のように、半径 a 、厚さ τ の薄い導体円板が磁束密度 B の一様な磁場中に置かれている。円板は中心 O を通り面に垂直な軸のまわりに回転可能で、磁場の向きと導体の回転軸とは平行である。電源から流れ出た電流 I が、導体板の中心軸から放射状に外縁に向かって一様に流れ、外縁部において接触した導線から元の電源へと戻っている。

- (1) 中心 O から $d\theta$ の角をなし、2つの半径 r と $r + dr$ の間に挟まれ、厚さ τ の微小領域を流れる電流が磁場から受ける力を考え、導体円板が磁場から受けるトルクの大きさを求めよ。ただし、電流が流れる外部導線と導体円板の接触による摩擦は無視できるものとする。

次に、下図右のように、磁束密度 B の一様な磁場中に、横の長さが $2a$ 、縦の長さが ℓ で互いに絶縁された長方形の閉回路が2つ直交して置かれている。それぞれの回路は細い導線1巻きで形成され、全抵抗はどちらも R である。2つの回路の中心線は共通で、この中心線を回転軸として一定の角速度 ω でそれぞれ別々に回転させる。中心線は磁場の方向と垂直であるとする。

- (2) 下図右のように、回路1の平面と磁場が角 θ ($0 < \theta < \pi/2$) をなしているとき、各々の回路に流れる電流の大きさと向きを答えよ。電流の向きは簡単な略図を描き、矢印で示せ。
- (3) 2つの回路を一定の角速度 ω で回転させる。各々の回路に必要なトルクの大きさを求めよ。
- (4) (3)において、各々の回路に対しトルクによって加えられる単位時間あたりのエネルギーを求め、そのエネルギーはどうなるか答えよ。



令和 9 年度 第 1 回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目 (理科)

科目名: 物理学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II ……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

III. ハミルトニアン H_0 が 2 つの固有状態 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ をもち、対応する固有値をそれぞれ $E_1, E_2 (E_1 < E_2)$ とする。時刻 $t \geq 0$ で時間によらない摂動ポテンシャル V が加わると、ハミルトニアンは $H = H_0 + V$ となる。ただし、摂動ポテンシャルの行列要素は

$$\langle \phi_1 | V | \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 | V | \phi_2 \rangle = 0, \quad \langle \phi_1 | V | \phi_2 \rangle = v, \quad \langle \phi_2 | V | \phi_1 \rangle = v^*$$

とする。ここで、時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

の解 $|\Psi(t)\rangle$ について考える。ただし h はプランク定数、 $\hbar = h/(2\pi)$ である。解 $|\Psi(t)\rangle$ はハミルトニアン H_0 の 2 つの固有状態の重ね合わせ

$$|\Psi(t)\rangle = a_1(t)|\phi_1\rangle + a_2(t)|\phi_2\rangle$$

で表すことができる。

- (1) 係数 $a_1(t), a_2(t)$ が満たす連立微分方程式を、 E_1, E_2, v, v^* を用いて表せ。
- (2) 係数 $a_1(t), a_2(t)$ について、 $a_1(t) = A_1 \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right), a_2(t) = A_2 \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ の形を仮定して A_1, A_2 が満たす連立方程式を求めよ。
- (3) (2) の連立方程式において、 $A_1 = A_2 = 0$ でない解が存在する条件から、 E の 2 つの解 $E_+, E_- (E_+ > E_-)$ を求めよ。ただし、解の形を簡単にするため、

$$E_0 = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad \Delta = E_2 - E_1$$

を用いて、 E_+, E_- を表すこと。

- (4) 連立微分方程式の線形性より、 $a_2(t)$ の一般解は以下のように書ける。

$$a_2(t) = C_+ \exp\left(-\frac{iE_+ t}{\hbar}\right) + C_- \exp\left(-\frac{iE_- t}{\hbar}\right)$$

時刻 $t = 0$ で系が固有状態 $|\phi_1\rangle$ にあったとする。初期条件を考慮して係数 C_+, C_- を求め、時刻 $t (\geq 0)$ で系が固有状態 $|\phi_2\rangle$ に見いだされる確率 $P(t)$ を求めよ。

- (5) (4) において、遷移確率 $P(t)$ の最大値 $P_{\max}$ と $P(t)$ の振動の周期 T を求め、時間変化をグラフに描け。
- (6) $P_{\max}$ を $\frac{\Delta}{2|v|}$ の関数として図示せよ。図中に $P_{\max} = \frac{1}{2}$ となる点を示し、準位間のエネルギー差 Δ と遷移の起こりやすさの関係を説明せよ。

令和9年度 第1回 京都大学大学院人間・環境学研究科 修士課程入学試験問題

専門科目 (理科)

科目名：物理学

(注意) 複数の設問がある場合、解答は、設問 (ローマ数字の I、II……) ごとに別の解答用紙を用いること。

ただし、設問の中で解答用紙に関して別途指定がある場合は、それに従うこと。

IV. 自由電子系を考える. 電子のスピンに対するゼーマンエネルギーのみを考慮し, 軌道磁気モーメントは無視する. 波数ベクトル $\mathbf{k}$ の電子の運動エネルギーを $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ とする. 電子の磁気モーメントを μ_B とすると, 磁場 B を z 軸方向に印加したとき, ゼーマンエネルギーを含めた電子のエネルギーは, $\sigma = \pm$ として

$$\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} = \varepsilon_{\mathbf{k}} + \sigma\mu_B B$$

で与えられる. ここで σ は, z 軸方向を電子スピンの量子化軸として選んだときに, スピン上向きあるいは下向きの状態に対応している. 磁場がないときのエネルギー ε における状態密度 (スピン自由度は含まない) を $D(\varepsilon)$, プランク定数を h として $\hbar = h/(2\pi)$, ボルツマン定数を k_B とする. 系の空間次元は3次元として, 以下の問いに答えよ.

- (1) 系の電子数を N , 電子数密度を n とする. 電子の質量を m とし, エネルギー分散 $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ が $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / (2m)$ で与えられるとき, フェルミ波数 k_F を求めよ.
- (2) フェルミエネルギー ε_F における状態密度が $D(\varepsilon_F) = 3N/(4\varepsilon_F)$ と書けることを示せ.
- (3) 電子のエネルギーが ε のときのフェルミ分布関数を $f(\varepsilon)$ とする. 電子スピンが σ の電子数を, フェルミ分布関数を含む積分の式で表せ.
- (4) $|\mu_B B| \ll \varepsilon_F$ とする. 温度 $T = 0$ のとき, B について一次までの近似で磁化と帯磁率を求めよ.
- (5) ここで考えた電子スピンの帯磁率への寄与と, 電子の軌道運動による帯磁率への寄与との定性的な違いを説明せよ.